

Aufgabe 4: Veneziano-Amplitude, Vier-Tachyon-Streuung

Die Tree-level Amplitude einer Vier-Tachyon-Streuung ist wie folgt gegeben ¹:

$$A_4^{tree}(k_1, k_2, k_3, k_4) = \int_{y_4}^{y_2} dy_3 (y_1 - y_2)(y_1 - y_4)(y_2 - y_4) \langle 0 | V(y_1) V(y_2) V(y_3) V(y_4) | 0 \rangle \quad (1)$$

mit $y_1 > y_2 > y_3 > y_4$ geordnet und den Vertexoperatoren

$$V(y) =: e^{ik \cdot X} : (y). \quad (2)$$

1. Berechnen Sie vorerst den Erwartungswert

$$\langle 0 | : e^{ik_1 \cdot X} : (y_1) : e^{ik_2 \cdot X} : (y_2) | 0 \rangle. \quad (3)$$

Hinweis: Die normalgeordnete Exponentialfunktion für den offenen String ist

$$: e^{ik \cdot X} : (y) = e^{ik \cdot X_{<}} e^{ik \cdot q} y^{2\alpha' k \cdot p} e^{ik \cdot X_{>}}, \quad (4)$$

wobei die Fourierzerlegung für $\sigma = 0$ sich vereinfacht zu

$$k \cdot X_{<} = \sqrt{2\alpha'} \sum_{n>0} \frac{-i}{n} k \cdot \alpha_{-n} y^n \quad \text{und} \quad k \cdot X_{>} = \sqrt{2\alpha'} \sum_{n>0} \frac{i}{n} k \cdot \alpha_n y^{-n}. \quad (5)$$

2. Allgemein ergibt sich für das Produkt beliebig vieler normalgeordneter Exponentialfunktionen obiger Art:

$$\langle 0 | \prod_{i=1}^N : e^{ik_i \cdot X} : (y) | 0 \rangle = \prod_{i<j} (y_i - y_j)^{2\alpha' k_i \cdot k_j} \quad \text{mit } y_i > y_{i+1} \text{ sowie } \sum_i k_i = 0. \quad (6)$$

Verwenden Sie dieses und die obigen Ergebnisse, um die Amplitude $A_4^{tree}(k_1, k_2, k_3, k_4)$ zu bestimmen. Vereinfachen Sie den Ausdruck, indem Sie die $SL(2)$ -Invarianz ausnutzen, um

$$y_1 = \infty, \quad y_2 = 1, \quad y_4 = 0 \quad (7)$$

zu fixieren. Drücken Sie die Impulse $k_i \cdot k_j$ durch die Mandelstam-Variablen s und t aus, die wie folgt definiert sind:

$$2\alpha' k_2 \cdot k_3 = \alpha' (k_2 + k_3)^2 - 2 = -\alpha' t - 2, \quad (8)$$

$$2\alpha' k_3 \cdot k_4 = \alpha' (k_3 + k_4)^2 - 2 = -\alpha' s - 2. \quad (9)$$

Schreiben Sie die Amplitude als Integral über die verbleibende Variable $y_3 \equiv x \in [0, 1]$.

¹Die Gesamtamplitude ergibt sich als die Summe über nicht-zyklische Permutationen der Argumente dieser Einzelamplitude mal einen Faktor, der die Kopplungskonstante enthält.